

Cours – Séquence n° 5 – ESPACE (I) :

vecteurs, droites et plans

I- VECTEURS DE L'ESPACE

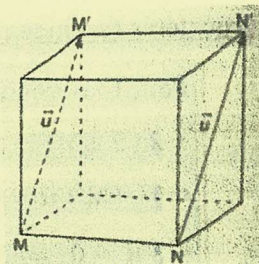
On étend à l'espace la notion de vecteur vue en géométrie plane.

1. Translations et vecteurs

Définitions

• Soit M et M' deux points distincts de l'espace.

1. La translation qui transforme M en M' est appelée la translation de vecteur $\overrightarrow{MM'}$.
2. On dit que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a :
 - pour direction celle de la droite (MM'),
 - pour sens celui de M vers M'
 - pour norme la longueur MM'.
3. La translation qui transforme M en M lui-même est appelée la translation de vecteur $\overrightarrow{MM}$.
4. Le vecteur $\overrightarrow{MM}$ est appelé le vecteur nul. On le note $\vec{0}$, ainsi, $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$.
5. Lorsque la translation qui transforme M en M' transforme aussi un point N en un point N', on dit que les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{NN'}$ sont égaux. On note : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$.
6. Dans le cas précédent, on dit que les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{NN'}$ sont des représentants d'un même vecteur $\vec{u}$.
On note : $\vec{u} = \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$.



Propriété : égalité de deux vecteurs

Soit M, M', N et N' quatre points distincts de l'espace.

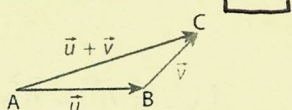
$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$ si, et seulement si, le quadrilatère MM'N'N est un parallélogramme (éventuellement aplati).

2. Opérations sur les vecteurs, combinaisons linéaires

• Somme de deux vecteurs

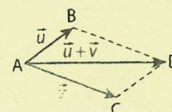
Relation de Chasles :

Pour tous points A, B et C, on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Règle du parallélogramme :

Pour tous points A, B et C on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ où D est le 4^{ème} sommet du parallélogramme ABDC.

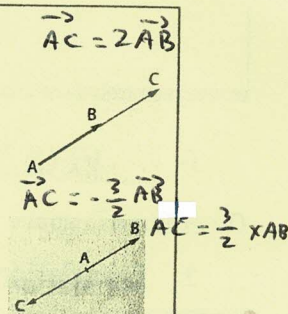


• Produit d'un vecteur par un nombre réel

Soit A et B deux points distincts de l'espace et λ un nombre réel.

Le vecteur $\vec{AC} = \lambda \vec{AB}$ est défini par :

- Si $\lambda \geq 0$: $\vec{AC}$ et $\vec{AB}$ sont de même direction, même sens et $AC = \lambda AB$.
- Si $\lambda < 0$: $\vec{AC}$ et $\vec{AB}$ sont de même direction, de sens contraires et $AC = -\lambda AB$.



Propriétés (admisses)

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tous réels λ et λ' on a :

- $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$
- $(\lambda + \lambda')\vec{u} = \lambda\vec{u} + \lambda'\vec{u}$
- $\lambda\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$
- $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$
- $\vec{u} + (-\vec{v}) = \vec{u} - \vec{v}$

• Combinaisons linéaires de vecteurs

Définition

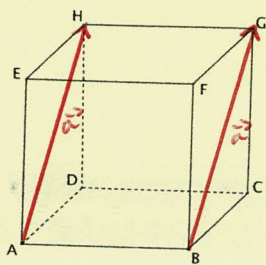
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ n vecteurs de l'espace.

Dire qu'un vecteur $\vec{v}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ signifie qu'il existe des réels $k_1, \dots, k_n$ tels que $\vec{v} = k_1\vec{u}_1 + \dots + k_n\vec{u}_n$.

Exemple 1

À l'aide du cube, représenter les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ définis par les combinaisons linéaires suivantes.

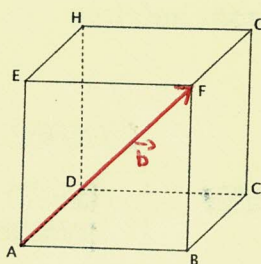
$$\vec{a} = \vec{AB} + \vec{CG} + \vec{FH}$$



$$\vec{a} = \vec{AB} + \vec{BF} + \vec{FH}$$

$\vec{a} = \vec{AH}$, d'après la relation de Chasles.

$$\vec{b} = 2\vec{AB} + \vec{BD} - \vec{FC}$$



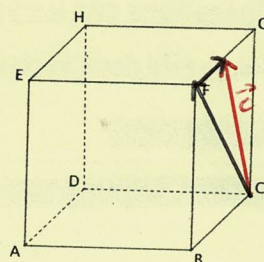
$$\vec{b} = \vec{AB} + \vec{AB} + \vec{BD} + \vec{CF}$$

$\vec{b} = \vec{AB} + \vec{AD}$, d'après la relation de Chasles.

$\vec{b} = \vec{AC} + \vec{CF}$, par la loi du parallélogramme.

$\vec{b} = \vec{AF}$ (par la relation de Chasles).

$$\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{AD} + \vec{EF} + \vec{BF} - \vec{AC}$$



$$\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{AD} + \vec{AB} + \vec{BF} + \vec{CA}$$

$\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{AD} + \vec{CB} + \vec{AF}$, par la relation de Chasles.

$\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{AD} + \vec{CF}$

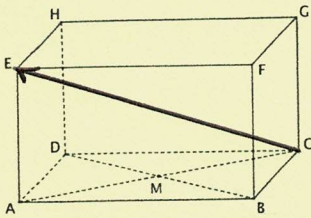
$\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{BC} + \vec{CF}$

$\vec{c} = \vec{CF} + \frac{1}{2}\vec{FG}$

Exemple 2

À l'aide du parallélépipède rectangle, exprimer les vecteurs $\vec{CE}$, $\vec{MG}$ et $\vec{MF}$ comme combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{AM}$, $\vec{AB}$ et $\vec{AE}$.

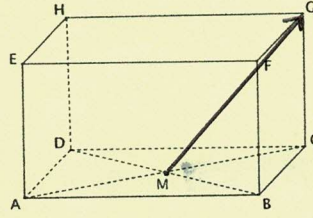
$\vec{CE}$ comme combinaison linéaire de $\vec{AM}$, $\vec{AB}$ et $\vec{AE}$.



$$\vec{CE} = \vec{CA} + \vec{AE} \text{, d'après la relation de Chasles}$$

$$\vec{CE} = -2\vec{AM} + \vec{AE} + 0\vec{AB}$$

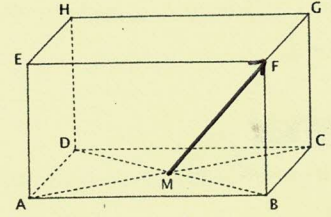
$\vec{MG}$ comme combinaison linéaire de $\vec{AM}$, $\vec{AB}$ et $\vec{AE}$.



$$\vec{MG} = \vec{MC} + \vec{CG} \text{, par la relation de Chasles}$$

$$\vec{MG} = \vec{AM} + \vec{AE} + 0\vec{AB}$$

$\vec{MF}$ comme combinaison linéaire de $\vec{AM}$, $\vec{AB}$ et $\vec{AE}$.



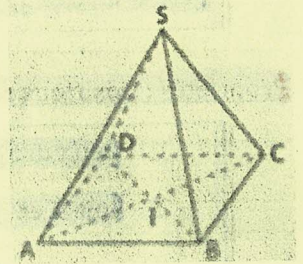
$$\vec{MF} = \vec{MA} + \vec{AB} + \vec{BF} \text{, d'après la relation de Chasles}$$

$$\vec{MF} = -\vec{AM} + \vec{AB} + \vec{AE}$$

Exemple 3

SABCD est une pyramide de sommet S dont la base est le parallélogramme ABCD de centre I.

- Exprimer le vecteur $\vec{SB} + \vec{SD}$ en fonction du vecteur $\vec{SI}$.
- En déduire une expression du vecteur $\vec{SI}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{BA}$, $\vec{BC}$ et $\vec{BS}$.



$$1) \vec{SB} + \vec{SD} = \vec{SI} + \vec{IB} + \vec{SI} + \vec{ID} \text{, par la relation de Chasles}$$

$$\vec{SB} + \vec{SD} = 2\vec{SI} + \underbrace{\vec{IB} + \vec{ID}}_{\vec{0}}$$

$$\vec{SB} + \vec{SD} = 2\vec{SI} + \vec{0} \text{, car I est milieu et le milieu de [BD]}$$

$$\vec{SB} + \vec{SD} = 2\vec{SI}$$

$$2) \text{ d'après 1) } \vec{SI} = \frac{1}{2} (\vec{SB} + \vec{SD})$$

$$\vec{SI} = \frac{1}{2} (-\vec{BS} + \vec{SB} + \vec{DS} + \vec{SD}) \text{ par la relation de Chasles}$$

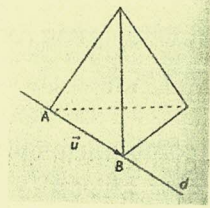
$$\vec{SI} = \frac{1}{2} (-\vec{BS} - \vec{BS} + \vec{BA} + \vec{BC}) \text{, car ABCD est un parallélogramme}$$

$$\vec{SI} = \frac{1}{2} \vec{BA} + \frac{1}{2} \vec{BC} - \vec{BS}$$

II- DROITES DE L'ESPACE

Définition

Dire qu'un vecteur non nul $\vec{u}$ est un **vecteur directeur d'une droite** d signifie qu'il existe deux points distincts A et B de d tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.



Remarque

Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur d'une droite d , alors tout vecteur $k\vec{u}$ avec $k \in \mathbb{R}^*$ est aussi un vecteur directeur de la droite d .

Définition

Dire que deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** signifie qu'il existe un réel λ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

Remarque

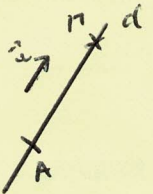
Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Propriété : caractérisation d'une droite par un point et un vecteur directeur

d est la droite passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Un point M appartient à la droite d si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

C'est-à-dire M appartient à la droite d si, et seulement si, il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}$.



Propriétés : positions relatives de deux droites de l'espace

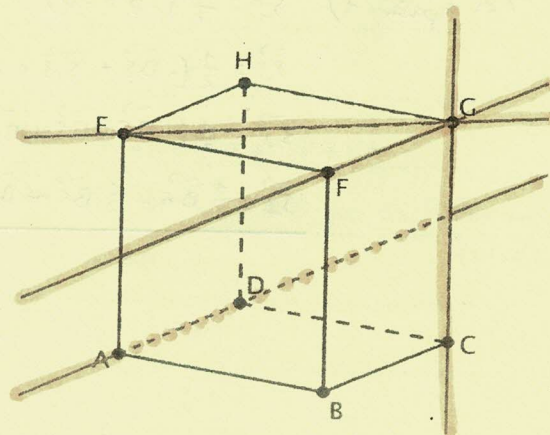
- Deux droites de l'espace sont soit coplanaires (dans un même plan) soit non coplanaires.
- Soit d et d' deux droites de l'espace de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$.

$\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires		$\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas colinéaires	
d et d' sont coplanaires et strictement parallèles	d et d' sont coplanaires et confondues	d et d' sont coplanaires et sécantes	d et d' sont non coplanaires

Exemple

ABCDEFGH est le cube ci-contre.

- Les droites (EG) et (FG) sont coplanaires et sécantes.
- Les droites (AD) et (FG) sont coplanaires et strictement parallèles.
- Les droites (AD) et (CG) sont non coplanaires (et ni parallèles et ni sécantes).



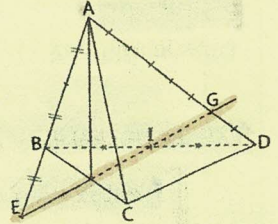
Propriétés : alignement et parallélisme

1. Trois points A, B et C de l'espace sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
2. Deux droites d et d' de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires.

Exemple 1

ABCD est le tétraèdre ci-contre.

I est le milieu de l'arête [BD], G est le point tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$ et E est le point tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.



1. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{GI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
2. Que peut-on en déduire ?

$$\begin{aligned}
 1) \quad \overrightarrow{GE} &= \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AE} \quad \text{par la relation de Chasles} & \overrightarrow{GI} &= \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DI} \\
 \overrightarrow{GE} &= -\frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} & \overrightarrow{GI} &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} \quad \text{car I est milieu de [BD]} \\
 \overrightarrow{GE} &= \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} & \overrightarrow{GI} &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) \\
 & & \overrightarrow{GI} &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\
 & & \overrightarrow{GI} &= -\frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\
 & & \overrightarrow{GI} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}
 \end{aligned}$$

2) D'après 1), on remarque que $\overrightarrow{GE} = 3\overrightarrow{GI}$

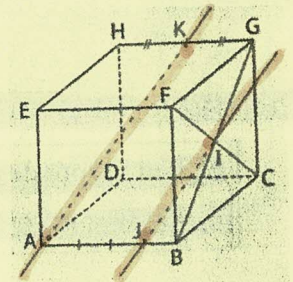
Donc les vecteurs $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{GI}$ sont colinéaires

Donc les points G, I et E sont alignés

Exemple 2

ABCDEFGH est le cube ci-contre.

I est le centre de la face BCGF, K est le milieu de [HG] et J est le point tel que $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$.



1. Exprimer chacun des vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{IJ}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
2. Que peut-on en déduire ?

$$\begin{aligned}
 1) \quad \overrightarrow{AK} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HK} \quad \text{d'après la relation de Chasles} & \overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ} \\
 \overrightarrow{AK} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HG} & \overrightarrow{IJ} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} \\
 \overrightarrow{AK} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} & \overrightarrow{IJ} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CB}) - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \\
 & & \overrightarrow{IJ} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{DA}) - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \\
 & & \overrightarrow{IJ} &= -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}
 \end{aligned}$$

2) D'après 1), on remarque que $\overrightarrow{AK} = -2\overrightarrow{IJ}$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires

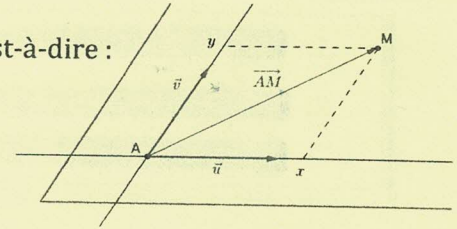
Donc les droites (AK) et (IJ) sont parallèles

III- PLANS DE L'ESPACE

Un plan de l'espace peut être défini par la donnée de deux droites sécantes, c'est-à-dire :

- d'un point A
- et de deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On note ce plan $(A ; \vec{u}, \vec{v})$.



Définitions

Dans le plan $(A ; \vec{u}, \vec{v})$, on dit que $(\vec{u}, \vec{v})$ est un **couple de vecteurs directeurs** du plan qui définit la **direction** du plan.

Propriété : caractérisation d'un plan par un point et deux vecteurs directeurs

P est le plan $(A ; \vec{u}, \vec{v})$.

Un point M appartient au plan P si, et seulement si, il existe des réels x et y tels que $\vec{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Démonstration

Soit deux points B et C tel que $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{AC}$.

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc $(A ; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère du plan (ABC).

Dans ce repère, tout point M de coordonnées $(x ; y)$ est tel que $\vec{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

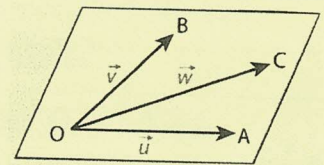
- Réciproquement, soit M un point de l'espace tel que $\vec{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Soit N le point du plan (ABC) de coordonnées $(x ; y)$ dans le repère $(A ; \vec{u}, \vec{v})$.

Alors $\vec{AN} = x\vec{u} + y\vec{v}$ et donc $\vec{AN} = \vec{AM}$. M et N sont confondus donc M appartient à (ABC).

Définition

Dire que trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** signifie que pour un point O quelconque de l'espace, les points O, A, B et C définis par $\vec{OA} = \vec{u}$, $\vec{OB} = \vec{v}$ et $\vec{OC} = \vec{w}$ appartiennent à un même plan.



Propriété (admise) : caractérisation des vecteurs coplanaires

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

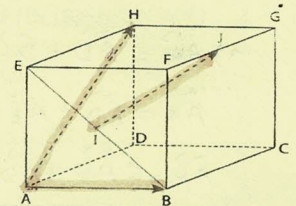
$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si, et seulement si, il existe des réels x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Exemple

ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle ci-contre.

I est le milieu de [BE] et J est le milieu de [FG].

Démontrer que les vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AH}$ et $\vec{IJ}$ sont coplanaires.



$$\vec{IJ} = \vec{JA} + \vec{AB} + \vec{BI} \quad \text{par la relation de Chasles}$$

$$\vec{IJ} = -\vec{AJ} + \vec{AB} + \frac{1}{2}(\vec{AF} + \vec{BG}) \quad \text{car J milieu de [FG]}$$

$$\vec{IJ} = -\frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AE}) + \vec{AB} + \frac{1}{2}(\vec{AE} + \vec{AH})$$

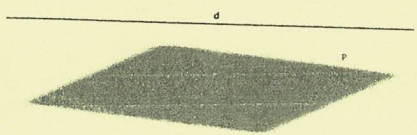
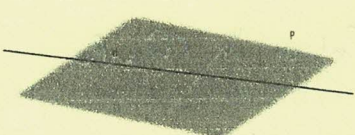
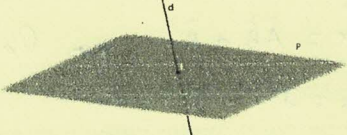
$$\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AH}$$

Pour $\vec{IJ}$ et $\vec{AH}$ et $\vec{AB}$ sont coplanaires.

Propriétés : positions relatives de droites et de plans de l'espace

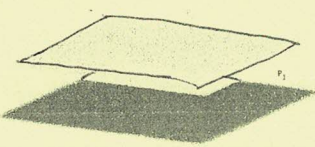
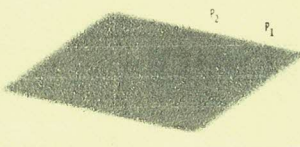
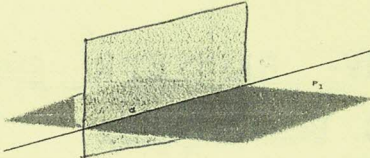
1. Une droite et un plan de l'espace sont soit sécants soit parallèles.

2. Soit P un plan de direction $(\vec{u}, \vec{v})$ et d une droite de vecteur directeur $\vec{w}$.

$\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires : d et P sont parallèles		$\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires
d et P sont strictement parallèles	d est incluse dans P	d et P sont sécants en I
		

3. Deux plans de l'espace sont soit sécants soit parallèles.

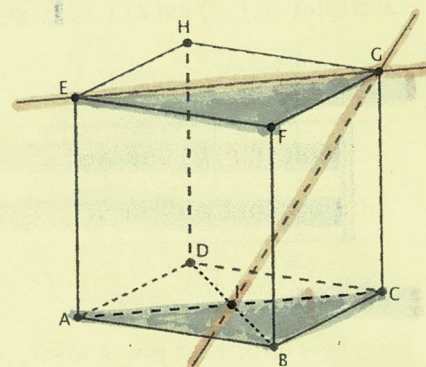
4. Soit P_1 et P_2 deux plans.

P_1 et P_2 ont même direction : P_1 et P_2 sont parallèles		P_1 et P_2 n'ont pas la même direction
P_1 et P_2 sont strictement parallèles	P_1 et P_2 sont confondus	P_1 et P_2 sont sécants suivant une droite d
		

Exemple 1

ABCDEFGH est le cube ci-contre.

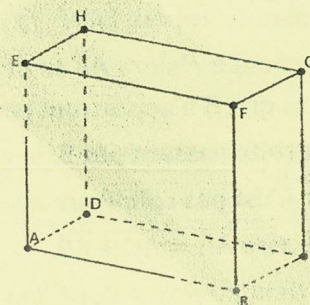
- La droite (GI) et le plan (ABC) sont sécants en I
- La droite (EG) et le plan (ABC) sont strictement parallèles
- La droite (EG) est incluse dans le plan (EFG).
 $(EG) \subset (EFG)$



Exemple 2

ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle ci-contre.

- Les plans (BCG) et (BCE) sont sécants selon la droite (BC)
- Les plans (ABC) et (EFG) sont strictement parallèles

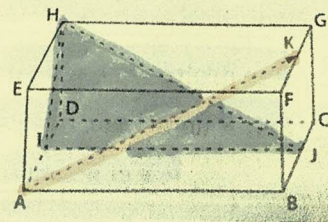


Exemple 3

ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle ci-contre.

I, J et K sont les milieux respectifs des arêtes [AD], [BC] et [FG].

Démontrer que (AK) est parallèle au plan (IJH).



Démontrons que $\vec{AK}$, $\vec{IJ}$ et $\vec{IH}$ sont coplanaires.

$\vec{AK} = \vec{AB} + \vec{BK}$, par la relation de Chasles.

$$\vec{AK} = \vec{IJ} + \vec{BJ} + \vec{JK}$$

$$\vec{AK} = \vec{IJ} + \vec{JD} + \vec{DH}$$

$\vec{AK} = \vec{IJ} + \vec{IH}$ donc $\vec{AK}$, $\vec{IJ}$ et $\vec{IH}$ sont coplanaires.

$(\vec{IJ}; \vec{IH})$ est un couple de vecteurs non colinéaires qui définissent le plan (IJH).

Donc $(AK) \parallel (IJH)$.

IV- BASES ET REPÈRES DE L'ESPACE

1. Bases de l'espace

Définition

Soit $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace.

Le triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est appelé **base de l'espace**.

Propriété :

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace.

Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique triplet $(x; y; z)$ de nombre réels tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Définition

Sous les conditions précédentes, le triplet $(x; y; z)$ est appelé **coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$** .

Démonstration

- **Existence :** Soit $\vec{AB}$ un représentant de $\vec{u}$.

Soit P le plan de repère $(A; \vec{i}; \vec{j})$.

Si B appartient à P alors $\vec{AB}$ se décompose suivant les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Supposons que B n'appartient pas à P .

Soit d la droite passant par B de vecteur directeur $\vec{k}$.

Comme $\vec{k}$ n'est pas colinéaire avec $\vec{i}$ et $\vec{j}$, la droite d coupe le plan P en un point C.

On peut écrire $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$.

$\vec{AC}$ appartient au plan P donc il existe un couple $(x; y)$ tel que $\vec{AC} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

$\vec{CB}$ est colinéaire avec $\vec{k}$ donc il existe un réel z tel que $\vec{CB} = z\vec{k}$.

Il existe donc un triplet $(x; y; z)$ tel que $\vec{AB} = \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

- **Unicité** : On suppose que l'on ait les deux écritures distinctes :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$$

$$\text{Alors } (x - x')\vec{i} + (y - y')\vec{j} + (z - z')\vec{k} = \vec{0}.$$

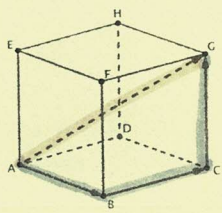
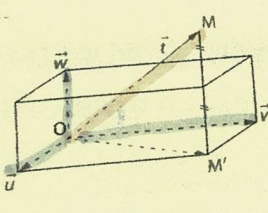
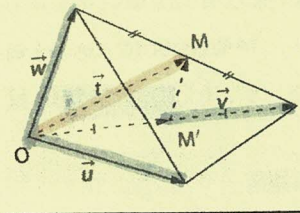
Supposons que l'une au moins des trois différences n'est pas nulle, par exemple : $z - z' \neq 0$.

Donc $\vec{k} = \frac{x'-x}{z-z'}\vec{i} + \frac{y'-y}{z-z'}\vec{j}$ et dans ce cas, les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ seraient coplanaires. Ce qui est exclu.

Les trois différences $x' - x$, $y' - y$ et $z' - z$ sont donc nulles, et donc $x = x'$, $y = y'$ et $z = z'$. D'où l'unicité.

Exemples 1

Dans chaque cas, décomposer le vecteur dans la base proposée et en déduire ses coordonnées dans cette base.

$\overrightarrow{AG}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CG})$.	$\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.	$\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
		
$\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CG}$, par la relation de Chasles $\vec{AG}(1; 1; 1)$	$\vec{OM} = \vec{ON} + \vec{NM}$ $\vec{ON} = \vec{u} + \vec{v} + 2\vec{w}$, par la règle du parallélogramme $\vec{ON}(1; 1; 2)$	$\vec{OM} = \vec{ON} + \vec{NM}$ $\vec{ON} = \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$, d'après le théorème de Thales $\vec{ON}(0; 1; \frac{1}{2})$

Exemple 2

ABCDEFGH est le cube ci-contre.

Soit I le milieu de [AH] et J le point de [FI] tel que $\vec{FJ} = \frac{2}{3}\vec{FI}$.

1. Décomposer les vecteurs $\vec{EJ}$ et $\vec{EC}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
2. Que peut-on en déduire ?

$$\forall \vec{ES} = \vec{EI} + \vec{IS}, \text{ d'après la relation de Chasles}$$

$$\vec{EI} = \frac{1}{2}(\vec{EH} + \vec{EA}) + \frac{1}{2}\vec{IF} \quad \text{car I est milieu de [AH]}$$

$$\vec{EI} = \frac{1}{2}(\vec{AD} - \vec{AE}) - \frac{1}{2}\vec{FI}$$

$$\vec{EI} = \frac{1}{2}\vec{AD} - \frac{1}{2}\vec{AE} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}(\vec{FH} + \vec{FA}) \quad \text{car J est milieu de [AF]}$$

$$\vec{EI} = \frac{1}{2}\vec{AD} - \frac{1}{2}\vec{AE} - \frac{1}{6}(\vec{FE} + \vec{EH} + \vec{FE} + \vec{EA})$$

$$\vec{EI} = \frac{1}{2}\vec{AD} - \frac{1}{2}\vec{AE} - \frac{1}{6}(-\vec{AB} - \vec{AE} - \vec{AB} + \vec{AD})$$

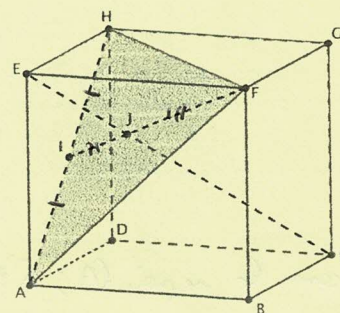
$$\vec{EI} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AD} - \frac{1}{3}\vec{AE}$$

$$\vec{EC} = \vec{EA} + \vec{AB} + \vec{BC}$$

$$\vec{EC} = \vec{AB} + \vec{AD} - \vec{AE}$$

2) On remarque que $\vec{ES} = \frac{1}{3}\vec{EC}$. Donc les vecteurs $\vec{ES}$ et $\vec{EC}$ sont colinéaires et donc

les points E, S et C sont alignés.



2. Repères de l'espace

Définitions

1. Un **repère de l'espace** est formé d'un point O et d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace. On le note $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
2. O est appelé **l'origine du repère**.

Propriété :

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace.

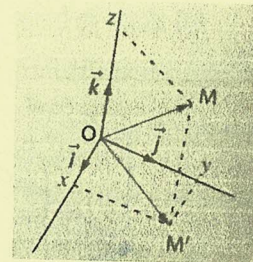
Pour tout point M , il existe un unique triplet $(x; y; z)$ de nombre réels tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Démonstration : conséquence de la propriété précédente.

Définitions

Sous les conditions précédentes :

1. le triplet $(x; y; z)$ est appelé **coordonnées du point M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$** .
2. x est l'**abscisse** de M ; y est l'**ordonnée** de M ; z est la **cote** de M .

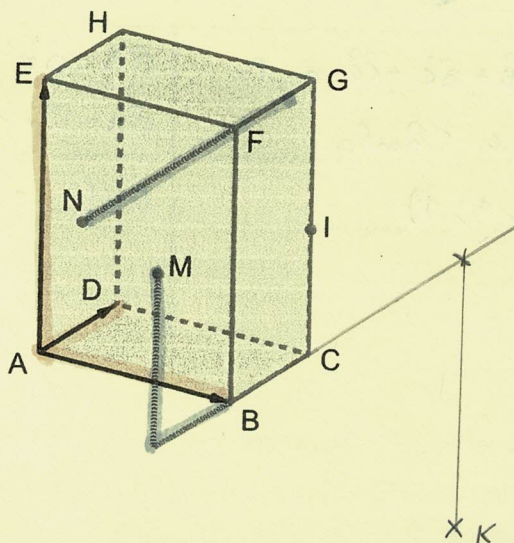


Exemple

ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle ci-contre.
I est le milieu de $[CG]$.

M et N sont définis par : $\overrightarrow{NF} = 2\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CI}$

1. Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$,
donner les coordonnées de tous les points.
2. Placer le point $K(1; 3; -1)$.



1) Soit le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

$A(0; 0; 0)$ $B(1; 0; 0)$ $C(1; 1; 0)$ $D(0; 1; 0)$ $E(0; 0; 1)$

$F(1; 0; 1)$ $G(1; 1; 1)$ $H(0; 1; 1)$ $I(1; 1; \frac{1}{2})$ $N(1; -1; \frac{1}{2})$

$M(0; -2; 1)$